

2. INTEGRAL MÚLTIPLE DE RIEMANN

2.5. Ejercicios complementarios

1. Estudia si existe la integral sobre $R = [0, 1] \times [0, 1]$ de la función $f(x, y) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.
2. Calcula la integral sobre $R = [0, 1] \times [0, 1]$ de la función $f(x, y) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } x = y \\ 0 & , \text{ si } x \neq y \end{cases}$.
3. Utiliza sumas de Riemann para calcular los siguientes límites:

$$(a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} \quad (b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 - (n-1)^2}} \right)$$

4. Demuestra, usando la condición de Riemann, que la suma de funciones integrables es integrable.
5. Demuestra que, tanto en la definición de contenido nulo como en la definición de medida nula se pueden sustituir los rectángulos (cerrados) por rectángulos abiertos.
6. Demuestra que si $A \subset \mathbb{R}^n$ es compacto, entonces A tiene contenido nulo si y sólo si A tiene medida nula.

Soluciones y/o sugerencias a los ejercicios:

1. No es integrable. La integral inferior es 0 y la superior es 1.
2. 0.
3. (a) $\frac{2}{3}$; (b) $\frac{\pi}{2}$.
4. Se toma una partición más fina que las dos obtenidas al aplicar la condición de Riemann a cada una de las funciones.
5. Para cada rectángulo cerrado obtenido al aplicar la definición de contenido nulo o medida nula, se considera un rectángulo abierto que lo contenga y cuyo volumen sea ligeramente superior (de tal manera que todos los excesos no superen la suma de todos los volúmenes originales).
6. Utiliza la definición de conjunto compacto (todo recubrimiento abierto admite un subrecubrimiento finito).